Sistemas Dinámicos

Àlex Haro, Arturo Vieiro

Grup de Sistemes Dinámics
Departament de Matemàtiques i Informàtica
Facultat de Matemàtiques UB

- La Teoría de los Sistemas Dinámicos estudia los procesos evolutivos (que dependen del tiempo).

- Es importante el estudio geométrico del espacio de fase, para descubrir el esqueleto del mismo (equilibrios, órbitas periódicas, variedades invariantes, toros invariantes, atractores extraños) y como este varía al modificar los parámetros (teoría de bifurcaciones).
- Este punto de vista geométrico fue iniciado por el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912).

- Tienen relación con multitud de áreas de las Matemáticas: Análisis, Geometría, Topología, Probabilidad, Métodos Numéricos, Teoría de Números, etc.
- Tiene multitud de aplicaciones a otras áreas de la Ciencia: Física, Química, Biología, Economía, etc.

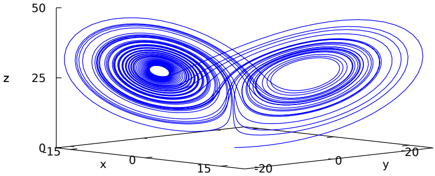
El sistema de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz (1962) modelan la convección de un fluido hidrodinámico.

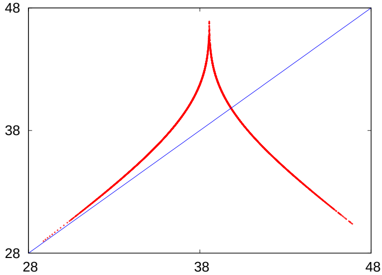
El sistema depende de los parámetros $\sigma, \rho, \beta > 0$.

En el paper original Lorenz considera $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.

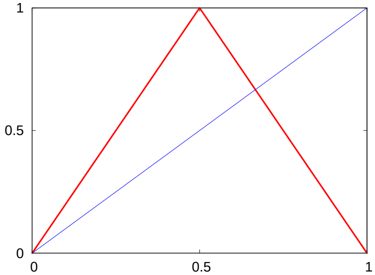
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma\,(y - x), \\
\dot{y} &= \rho x - y - xz, \\
\dot{z} &= -\beta z + xy.
\end{aligned}
$$



Algunas propiedades se pueden estudiar reduciendo la dimensión via una aplicación de Poincaré. Consideramos $\Sigma = \{\dot{z} = 0, z > 0\} = \{z = \frac{1}{\beta}xy, z > 0\}$, es decir, la aplicación de paso por el máximo de z.



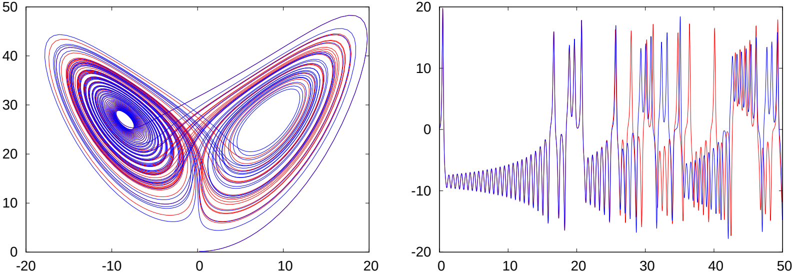
Representación de z_{n+1} versus z_n



La aplicación "tienda"

El atractor de Lorenz es caótico!

Sensitividad respecto condiciones iniciales



Se muestra la evolución de dos condiciones iniciales cerca de la variedad invariante inestable del origen que difieren 10^{-4} en la tercera componente.

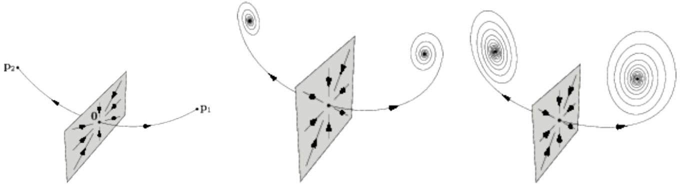
Bifurcaciones

Interesa entender la formación del atractor extraño de Lorenz. Fijamos $\sigma = 10$ y $\beta = 8/3$, y estudiamos el comportamiento dinámico al variar $\rho > 0$.

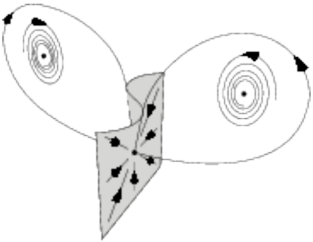
- $\rho < 1$: El origen es un nodo atractor y es el único punto fijo.
- $\rho = 1$: Bifurcación de Pitchfork. Aparecen 2 puntos fijos (nuevos)

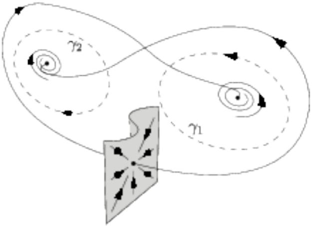
  $$P_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

  que són nodos atractores (si $\rho \gtrsim 1$). El origen es un punto silla que tiene una variedad inestable 1D y una variedad estable 2D.
- $\rho \approx 1{,}3456$: Transición a nodo-foco de $P_{\pm}$. Dos valores propios reales (y negativos) colisionan y se vuelven complejos con parte real negativa.



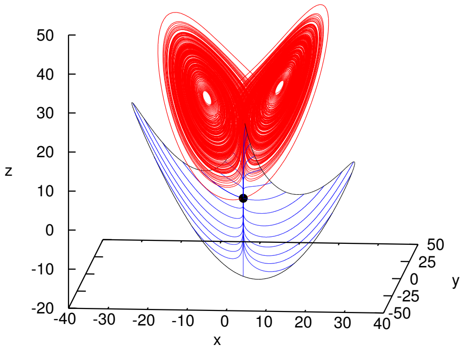
- $\rho \approx 13{,}926$: Bifurcación homoclínica (bifurcación global!). Se crean dos órbitas periódicas (simétricas).

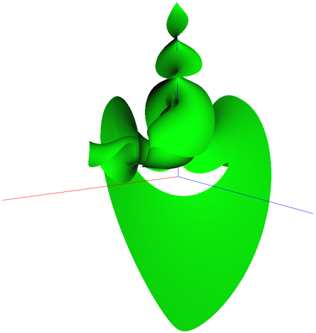




- $\rho = \rho_h = 470/16 \approx 24{,}74$: Bifurcación de Hopf. Los puntos se vuelven puntos silla-foco repulsor (con una variedad estable 1D y otra inestable 2D, ésta asociada a valores propios complejos con parte real positiva), y las órbitas periódicas desaparecen.
- Para $\rho > \rho_h$ se crea el atractor de Lorenz, que tiene una estructura muy complicada. Para $\rho \gtrsim 31{,}01$ se destruye.

Para $\rho > \rho_h$ (aquí, $\rho = 28$), la variedad de Lorenz (la variedad estable del origen), juega un papel importante en la organización de la dinámica. La variedad inestable es 1D, y su adherencia, está incluida en el atractor de Lorenz.





Izquierda: Variedad de Lorenz local (azul) y variedad inestable del origen (rojo).

Derecha: Globalización de la variedad de Lorenz

¡Ánimo!