Transbord a la ISS:
guia bàsica per viatjar per l'espai

Juliols UB 2012

19/07/2012 Barcelona

A. Vieiro

Dinàmica d’un coet

Els vols espacials són possibles gràcies a que un coet permet, sota les lleis gravitacionals de Newton, que un vehicle sigui transferit des del camp gravitacional d’un objecte solar fins a un altre.

Ens interessa entendre les idees bàsiques de la **dinàmica d’un coet**

- en el buit sense gravetat,
- sotmés a gravetat,
- a través d’una atmosfera.

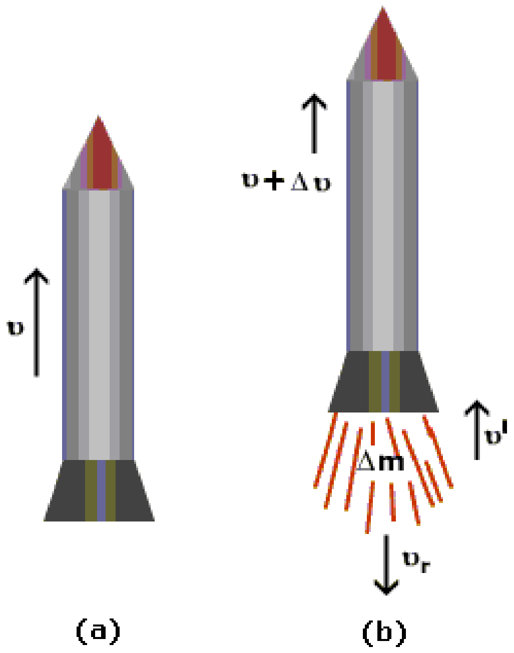
Proton-K rocket. Zarya Control Module ISS

(Functional Cargo Block FGB) 20.11.1998

L’equació d’un coet (I)

Considerem el moviment d’un coet sense forces d’arrossegament en un medi sense gravetat.

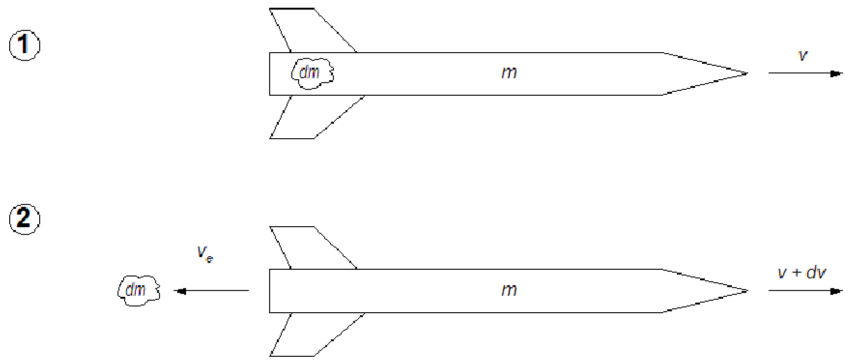
La propulsió d’un coet es conseqüència d’expulsar part de la seva massa (carburant) a gran velocitat per la tobera. Suposem que l’embranzida (thrust) del coet és constant i actua de manera contínua en una sola direcció. Això implica que la massa expulsada per segon i la velocitat de sortida del coet són constants.



Rocket propulsion

L'equació d'un coet (II)

Suposem que un coet de massa m que viatja a velocitat v conté un massa dm de carburant que serà expulsada instantàniament a una velocitat $-v_e$. Com a resultat el coet guanya un increment de velocitat dv.



Conservació del moment lineal:

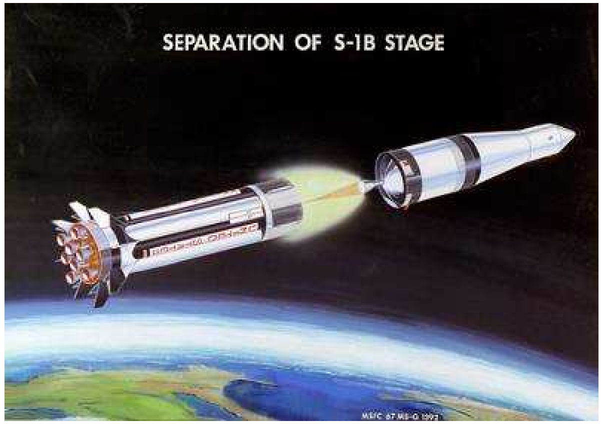
$$(m + dm)\, v = m\,(v + dv) + dm\,(v + v_e) \Longrightarrow m\, dv = -\, dm\, v_e$$

Integrant:

$$v_f - v_0 = v_e \log(m_0/m_f)$$

L’avi de la ciència dels coets

L’equació anterior va ser publicada l’any 1903 by K.E. Tsiolkovsky (1857–1935) en l’article “Investigation of Interplanetary Space by Means of Rocket Devices”



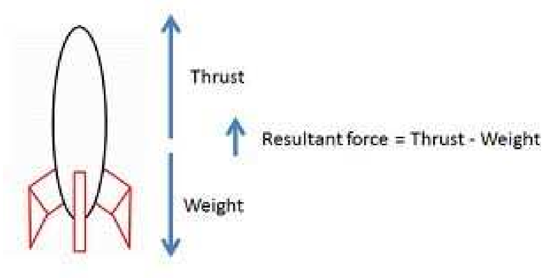
Notem que:

- $m_0/m_f \approx 5, v_e \approx 2.5\,km/s \Longrightarrow v_f - v_0 \approx 4.02\,km/s$.
- Velocitat d’escapament de la Terra és $\approx 11.2\,km/s$!!

$\longrightarrow$ Cal un coet de varies etapes!

L'equació d'un coet sota gravetat

Suposem que el coet ascendeix en línia recta i que està sotmés a gravetat.



La força de gravetat g per unitat de massa m provoca un canvi del moment lineal de $m\,g\,dt$. Per tant,

$$m\,dv = -v_e\,dm - \;m\,g\,dt$$

d'on

$$v_f \;-\; v_0 \;=\; v_e \log(m_0/m_f) \;-\; g\,t$$

$\longrightarrow$ Per no perdre alçada cal anar perdent massa (motor encés) constantment.
$\longrightarrow$ Cal perdre massa rápidament per minimitzar l'efecte de la gravetat.

L'efecte de l'atmosfera

Suposem que el coet ascendeix a través d'una atmosfera de densitat ρ. La força d'arrossegament que experimenta un objecte al moure's en un fluid (gas) ve donada per

$$F = \frac{1}{2m} C\, A\, \rho\, v^2$$

on C és el coeficient d'arrossegament, A és l'àrea de la secció del coet i v és la velocitat del coet.

$\longrightarrow$ Aquesta força és màxima si s'ascendeix verticalment.

$\longrightarrow$ Per minimitzar el seu efecte cal v petita.

$\longrightarrow$ Menys important que la gravetat.

Per tant, cal minimitzar la força de la gravetat dissenyant trajectòries tals que

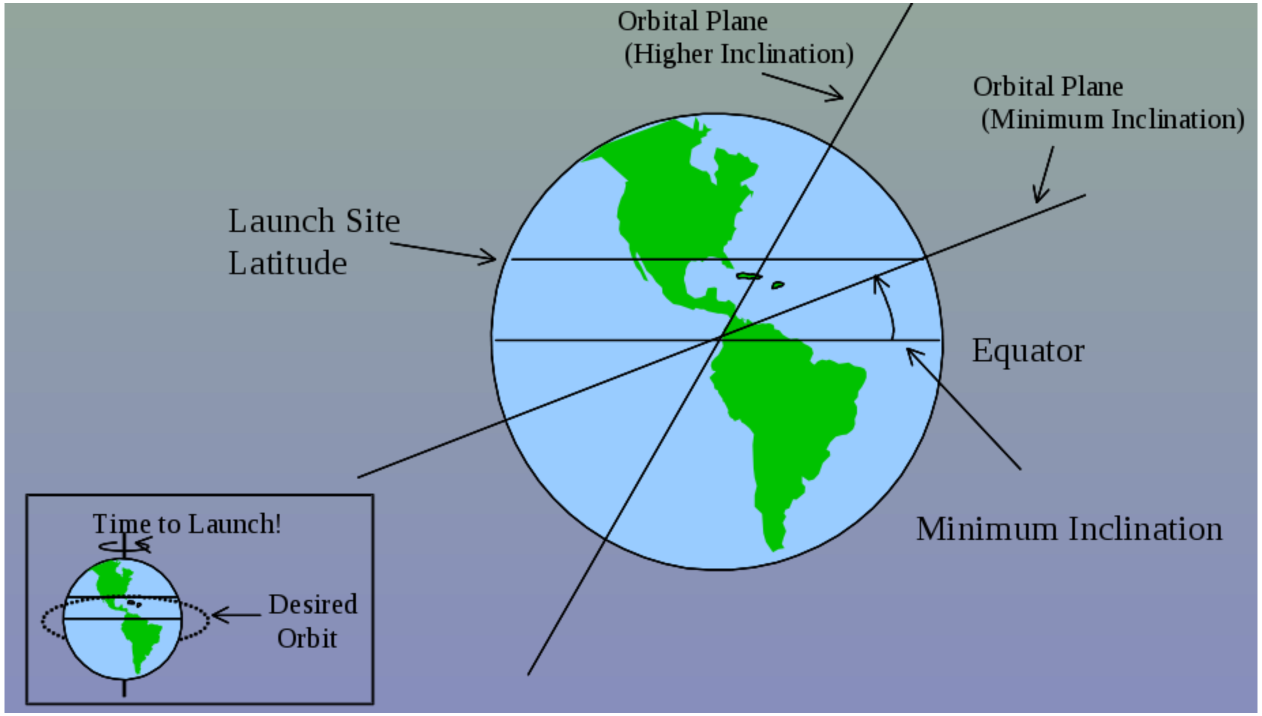
$\longrightarrow$ surtin en vertical (evitar grans velocitats on ρ gran),

$\longrightarrow$ es corbin i es converteixen en horitzontals per guanyar velocitat.

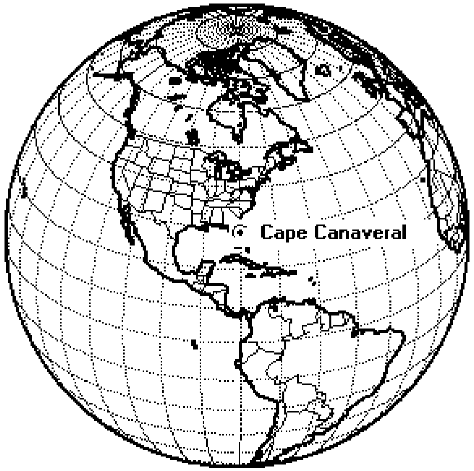
Centres de llançament

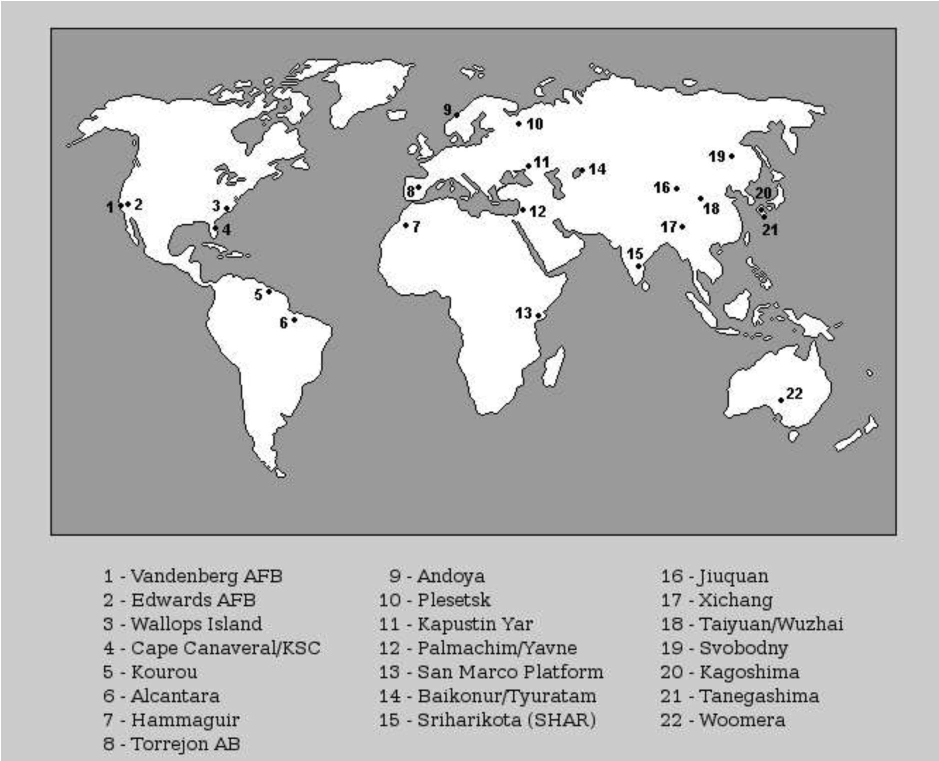
El cost (carburant) per injectar un satèl·lit en una òrbita concreta depèn en part del lloc de llançament. La velocitat deguda a la rotació de la Terra (més gran a l'equador) juga un paper important, i depèn de la latitud del centre de llançament i de la inclinació de l'òrbita objectiu.

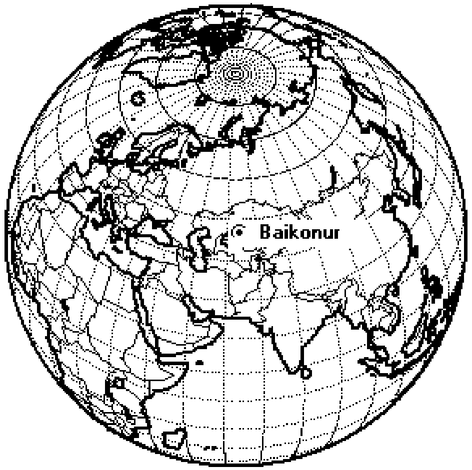
El cost de fer una transferència de pla orbital és molt elevat. Per això a l'hora de dissenyar la missió s'intenta fer una injecció directa al pla objectiu.



Centres de llançament actuals







$28°28'$ N $80°33'$ W

Min. Incl. $28°$.

Max. Incl. $57°$.

$45°37'$ N $63°19'$ E

Min. Incl. $49°$.

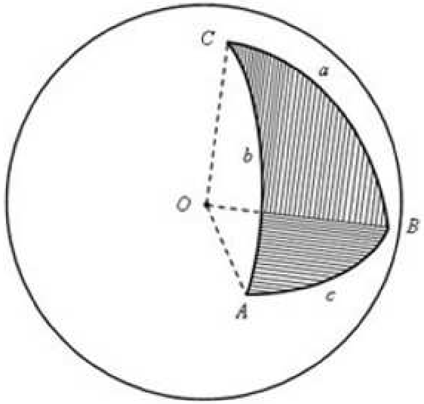
Max. Incl. $99°$.

Idea:

La latitud del lloc de llançament determina a quines inclinacions pot llançar.

Trigonometria esfèrica

Considerem el triangle esfèric ABC en l'esfera unitària.



1. $A = \widehat{BAC}$, $B = \widehat{ABC}$ i $C = \widehat{ACB}$ són els angles del triangle.
2. $a = \widehat{BOC}$, $b = \widehat{AOC}$ i $c = \widehat{AOB}$ són els costats del triangle.

Relacions trigonomètriques de 1er ordre

1. 1er grup de Bessel (T. sinus del costat):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

2. 2on grup de Bessel (T. cosinus del costat):

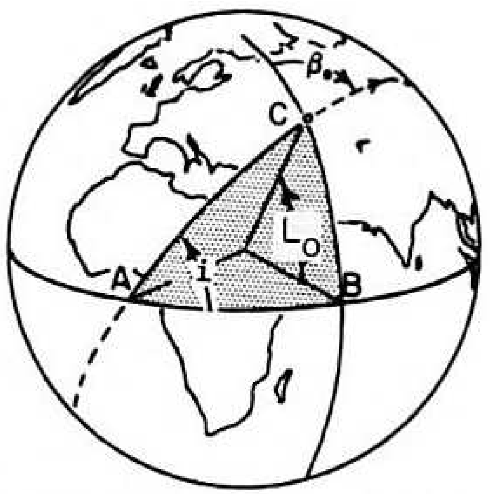
$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \, \cos c + \sin b \, \sin c \, \cos A \\
\cos b &= \cos c \, \cos a + \sin c \, \sin a \, \cos B \\
\cos c &= \cos a \, \cos b + \sin a \, \sin b \, \cos C
\end{aligned}$$

3. 4rt grup de Bessel (T. cosinus de l'angle):

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \, \cos C + \sin B \, \sin C \, \cos a \\
\cos B &= -\cos C \, \cos A + \sin C \, \sin A \, \cos b \\
\cos C &= -\cos A \, \cos B + \sin A \, \sin B \, \cos c
\end{aligned}$$

Latitud i azimut: inclinació de l'òrbita

Suposem que llancem un satèl·lit amb azimut β_0 des d'un punt C de la Terra amb latitud L_0 i longitud λ_0.



$$\cos i = \sin \beta_0 \cos L_0$$

→ Direct orbit ($0 \leq i < \pi/2$) $\Leftrightarrow \cos i > 0 \Leftrightarrow \beta_0 \in (0, \pi) \Leftrightarrow$ cap a l'est.

→ Inclinació mínima? Mínim $i \Rightarrow$ Màxim $\cos i \Rightarrow \beta_0 = \pi/2 \Rightarrow i = L_0$

En particular, només es pot llançar directament a una òrbita equatorial des d'un lloc de llançament sobre l'equador.

Maniobres orbitals

Suposem que tenim un vehicle (nau espaial, satèl·lit,...) en una òrbita concreta que volem modificar.

Per simplificar, suposem que el moviment té lloc en un camp de forçes central: la nau ($m_s = 0$) orbita al voltant d'un cos massiu (M) i la influència dels altres cossos és menyspreable.

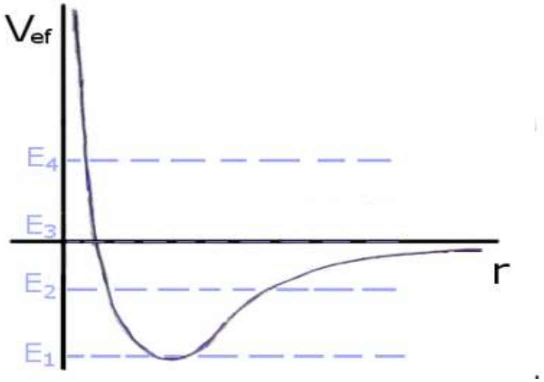
Si el motor està apagat l'òrbita resta inalterada. L'encesa dels motors de la nau farà, en general, canviar els 6 elements orbitals. Suposarem que el motor actua de manera instantànea (propulsió infinita).

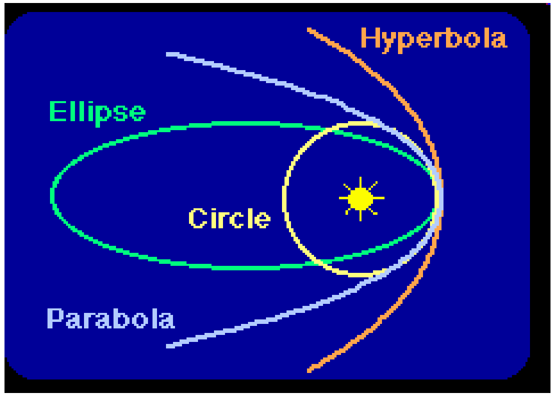
Recordem: Constants del moviment

- Moment angular: $\boxed{\mathbf{L} := \mathbf{r} \wedge \mathbf{r}'}$
  - Moviment en el pla Π perpendicular a $\mathbf{L}$.
  - Llei de las àrees (Kepler). En Π introduïm coordenades polars (r, θ):

$$\begin{aligned} r'' - r(\theta')^2 &= -GM/r^2 \quad \text{(ecuació diferencial radial)}, \\ 2r'\theta' + r\theta'' &= 0 \quad \text{(ecuació diferencial angular)} \Leftrightarrow \text{ 2a Ley de Kepler.} \end{aligned}$$

- Energia: $\boxed{E := (\mathbf{r}')^2/2 - GM/r}$
  - Energia potencial: $V(r) = -GM/r$ (la gravetat és una força conservativa).
  - Es pot escriure: $E = (r')^2/2 + V_{\text{ef}}(r), \quad V_{\text{ef}}(r) := L^2/(2r^2) - GM/r.$





Intuïció?

Suposem que estem en la mateixa òrbita circular que una nau a la que volem agafar. Què fem per agafar-la?

Intuïció?

Suposem que estem en la mateixa òrbita circular que una nau a la que volem agafar. Què fem per agafar-la?

Accelerem?

Si accelerem augmentem la velocitat v

$\Longrightarrow$ passem a una òrbita el·líptica amb apogeu més alt i periapsis més petit

$\Longrightarrow$ estem per sobre de l'altre nau

però girem més lentament (3a llei de Kepler)!!

Intuïció?

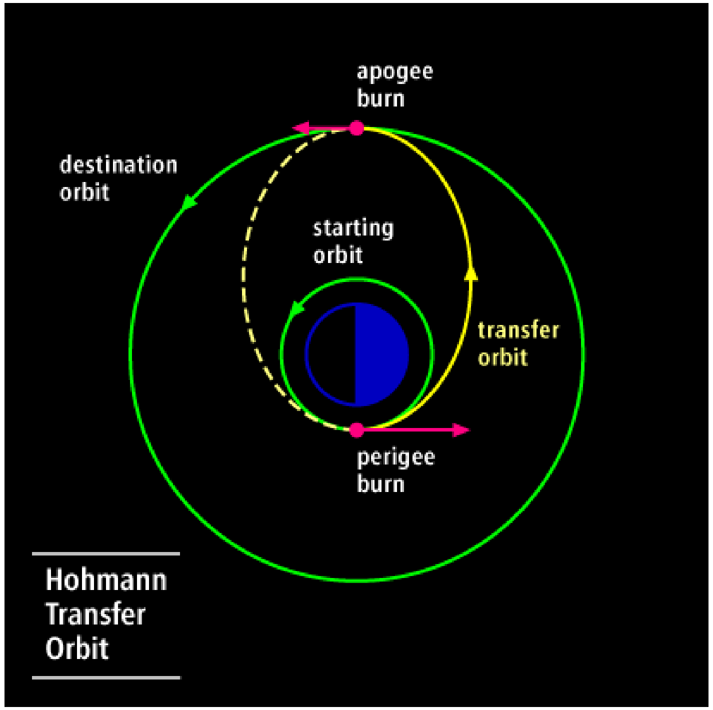
Suposem que estem en la mateixa òrbita circular que una nau a la que volem agafar. Què fem per agafar-la?

Frenem!

Cal desaccelerar $\Rightarrow$ la nova òrbita tindra un apoapsis més baix i període més curt (3a llei de Kepler) $\Rightarrow$ la nau es mourà més rapidament i la distància entre les naus es pot fer més petita $\Rightarrow$ cal tornar a accelerar per pujar la trajectòria i trobar-se amb l'altre nau.

Transferència entre òrbites coplanàries

Suposem que la nau es mou en òrbita circular de radi R_1 al voltant de la massa M i que volem fer una transferència a una òrbita de radi $R_2 > R_1$.

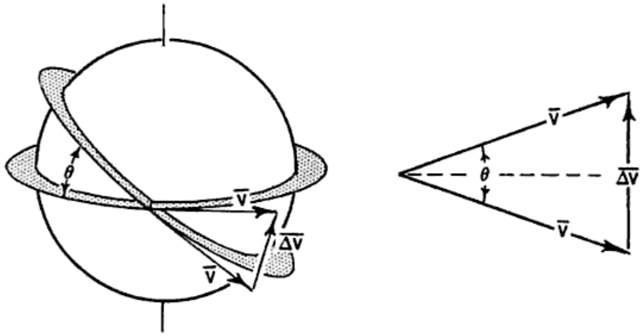


$\rightarrow$ La transferència Hohmann (2 tangent burns) requereix el mínim Δv.

$\rightarrow$ TOF $= \pi\sqrt{a_t^3/GM}$ (la meitat del període de l'òrbita de transferència).

Maniobres de canvi de pla

Suposem que volem canviar la direcció de l'òrbita de la nau per un angle α, mantenint la velocitat i la forma de l'òrbita.



$$\Delta v = 2v\sin(\theta/2)$$

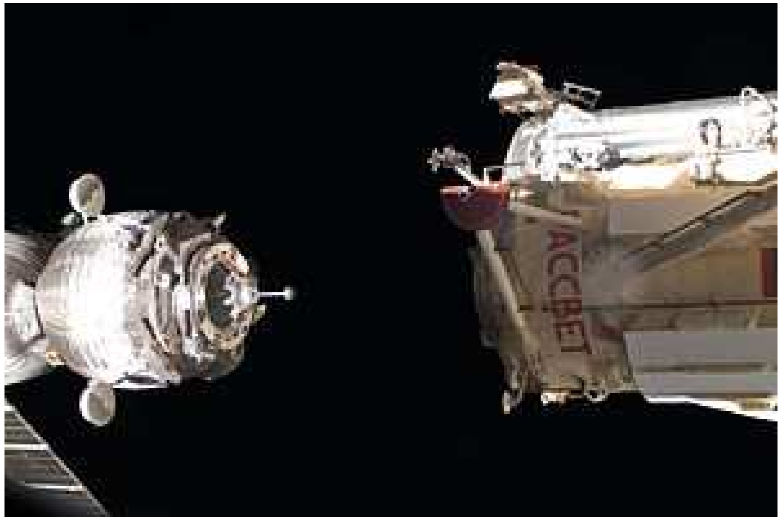
MOLT CAR!

Ex. Suposem que estem en òrbita equatorial ($v = 7730\,m/s$) i volem canviar a una òrbita polar ($\theta = \pi/2$). Tenim $\Delta v \approx 10930\,m/s$, equivalent a la velocitat d'escapament! És més del necessari per anar a la Lluna, aterrar i tornar a la Terra!!

Maniobres de rendezvouz i d’acoblament

Rendezvous és la maniobra que es realitza quan la nau es troba aproximadament en la mateixa òrbita que un satèl·lit (target) i es preten la sincronització per tenir un encontre.

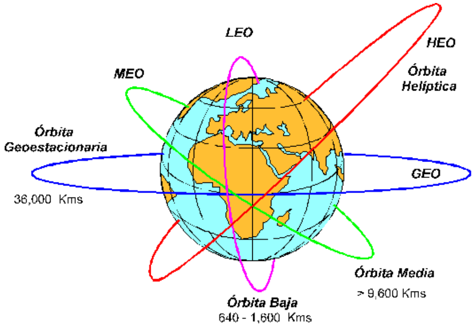
Moltes vegades les maniobres de rendezvous van seguides d’una maniobra d’acoblament (docking).

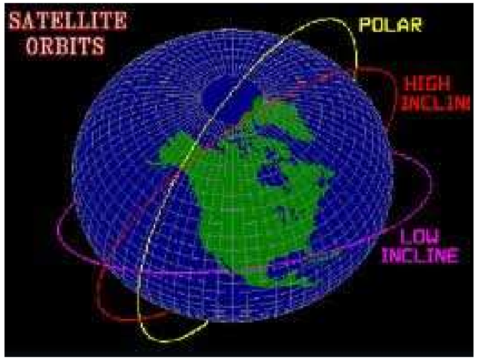


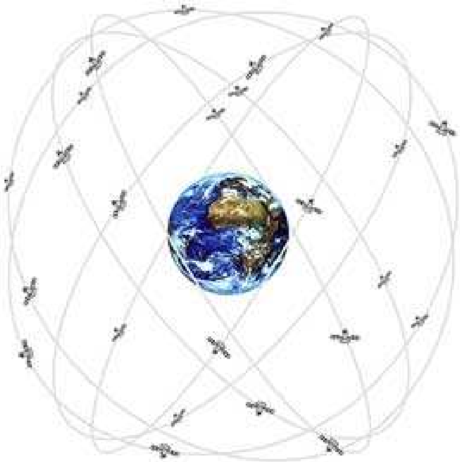
Decembre 2011: Soyuz TMA-03M docking with ISS

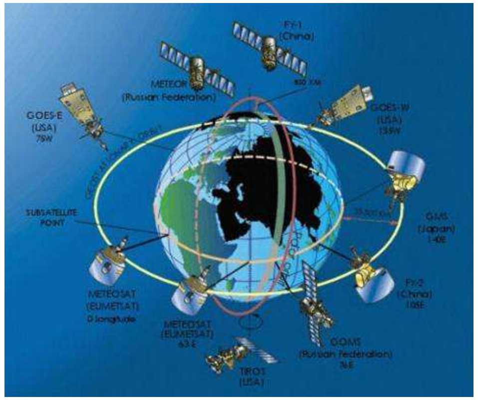
Expedición 30 (abril 2012): Shkaplerov, Burbank, Ivanishin, Kuipers, Kononenko y Pettit

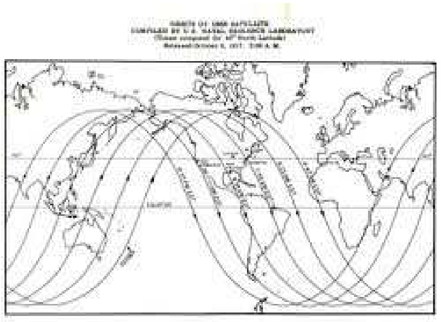
Alguns tipus d'òrbites de satèl·lits





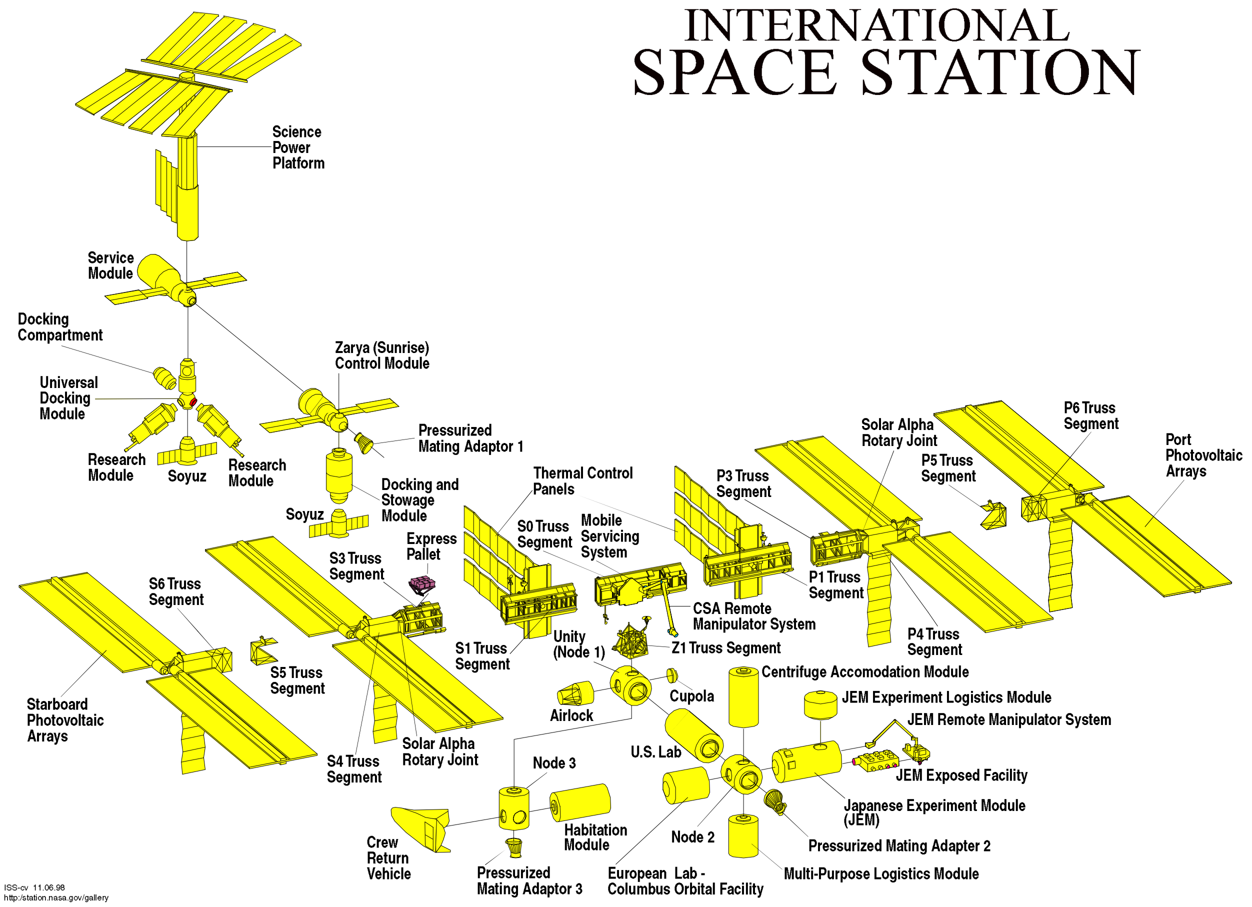






La ISS

1. És el satèl·lit (construït per l'home) més gran que està en òrbita.
2. Projecte internacional: United States, Russia, Europe, Japan, Canada,...
3. És un centre de recerca (efectes de la microgravetat).
4. Es va construir en òrbita: més de 100 elements en unes 45 missions!



L'òrbita de la ISS

Inclinació $\approx$ 51.6 deg. (Baikonur: $i \approx 46$ deg.)

LEO orbit: Perigeu 278 km   Apogeu 460 km.

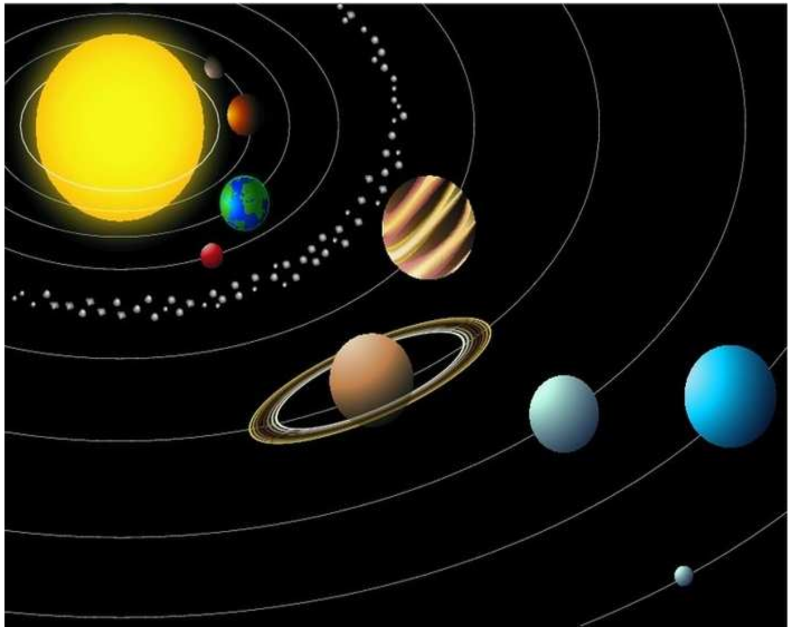
Sobrevola el 85 % de la superfície de la Terra on està el 95 % de la població.

Posició actual i groundtrack:

`http://iss.astroviewer.net/index2.php`

Missions interplanetàries: el Sistema Solar

El Sol i els cossos que es nouen en òrbita al voltant d'ells: 8 planetes, > 61 satèl·lits naturals, milers d'asteroids, cometes, meteorits i pols interplanetari.



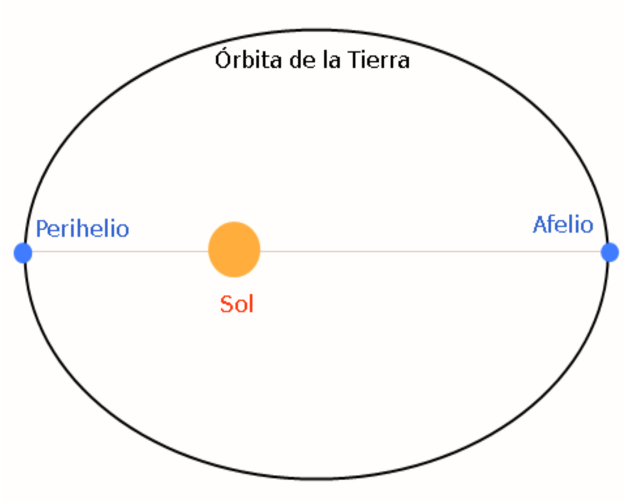
La massa del Sol és $\approx 99.98\%$ de la massa del sistema.

El Sistema Solar: distàncies?

El Sistema Solar s'estén fins a *l'heliopausia*: ≈ 100 UA

(1 UA $\approx 149.597.870$ km $\Rightarrow$ 150 mil mil·lions de kilòmetres!!)

Distància Terra-Sol (peri-apo): $147\,098\,290$ km – $152\,098\,232$ km.



Una curiositat històrica: La llei de Bode (UA)

$$a = (n+4)/10, \quad n = 0, 3, 6, 12, \boxed{24}, 48, 96, \ldots.$$

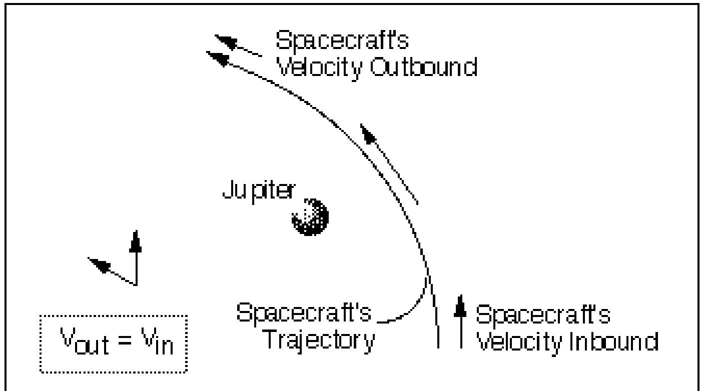
Missions interplanetàries

The patched-conic approximation:

- Les trajectòries segueixen bàsicament solucions del Kepler central (Sol).
- Al voltant de cada planeta es determina una zona (esfera d'influència) on la trajectòria es veu afectada per la gravetat del planeta.
- Dintre de l'esfera d'influència es gasta un Kepler central amb el planeta al centre (aproximació local).
- Per escapar de la influència del planeta cal assolir un trajectòria parabòlica/hiperbòlica del problema local.
- Per dissenyar la trajectòria podem pensar en transferències tipus Hohmann amb el Kepler central (Sol).

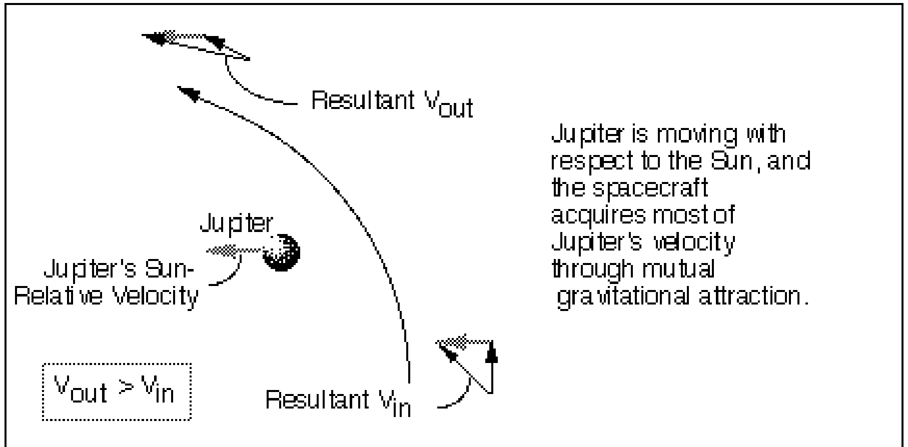
La necessitat de fly-bys

Ex. Cassini-Huygens necessita un $\Delta v \geq 15.7\, km/s$ si intentem una transferència Hohmann directa a Saturn des de la Terra. No hi ha cap coet actual capaç de proporcionar un Δv semblant.



Relative to Jupiter, the spacecraft ends up with the same speed leaving as it had coming in, even though it accelerates during flyby.

Alternativa: fer servir la gravetat del planetes! Calen 3 cossos RTBP!!



The result is that the magnitude of V_{out} exceeds that of V_{in} relative to the Sun.

Rellevància històrica dels fly-bys

1. Abans de 1961 s'intentava millorar els coets per aconseguir més Δv.
2. Les lleis de termodinàmica impliquen que els coets no poden tenir $v_e > 4.7$ km/s.
3. Es pensava que caldrien motors nuclears i/o elèctrics molt sofisticats.
4. Era un repte anar fins Venus o Mart (calien grans avenços en propulsió).

Els efectes gravitatoris eren un problema en el disseny d'òrbites usant aproximacions del problema de Kepler.

L'any 1961 M. Minovitch (becari d'estiu a JPL!!) va treballar en el problema restringit buscant solucions aproximades. Usant àlgebra vectorial va veure que l'ús de la gravetat dels planetes permet guanyar velocitat.

Va obrir la porta a viatges interplanetaris! A més, la teoria de propulsió que va descobrir no depèn de la massa del vehicle!

The Earth is the Cradle of the Mind but one cannot eternally live in a cradle.

Konstantin E. Tsiolkovsky

Bibliografia:

1. *Orbital Motion.* A.E. Roy. Institute of Physics, 2004 (1a Ed 1978).
2. *Fundamentals of astrodynamics.* R.R. Bate, D.D. Mueller and J.E. White. Courier Dover Publications, 1971.

¡Moltes gràcies per la vostra atenció!