

Matemáticas y misiones espaciales. Algunos aspectos de la misión Génesis.

Àlex Haro

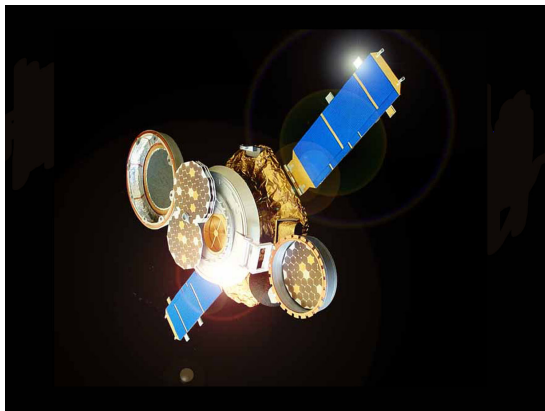
Grup de Sistemes Dinàmics

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Facultat de Matemàtiques UB

- 1 La misión Génesis (I)
- 2 Modelos matemáticos y Sistemas Dinámicos
- 3 El Modelo RTBP
- 4 El punto L_1
- 5 El punto L_1 y sus órbitas halo
- 6 La misión Génesis (II)
- 7 Otras aplicaciones del RTBP
- 8 Autopistas interplanetarias

La misión Génesis

La búsqueda de los orígenes



GENESIS
SEARCH FOR ORIGINS

<http://genesismission.jpl.nasa.gov/>

La misión Génesis

Objetivo científico

Obtener muestras de viento solar, que ayudarán a los científicos a responder cuestiones relacionadas con la Teoría de Evolución Estelar y, en particular, de nuestro **Sistema Solar**.

- ¿De qué está hecho el Sol?
- ¿Están hechas la Tierra y los planetas del mismo material?



- La nave ha de estar recogiendo muestras de viento solar durante un tiempo suficiente (más de dos años).
- La órbita durante ese tiempo ha de ser lo más estacionaria posible, con unos colectores en la dirección del Sol.
- Las muestras recogidas han de regresar a la Tierra, sin que se contaminen.
- Las órbitas de tránsito (de ida y vuelta) y la órbita de aparcamiento, han de ser eficientes desde el punto de vista energético.

- Usar las fuerzas gravitatorias de la Tierra y el Sol para que hagan casi todo el trabajo para desplazar la nave.
- Estudiar el correspondiente **modelo matemático** para descubrir las mejores opciones y diseñar la misión espacial.

La aplicación de las Matemáticas a la Mecánica Celeste tiene una larga tradición.

- El **método científico** fue esencial para entender “el sistema del mundo”, a finales del siglo XVII. A partir de un modelo matemático, y siguiendo el **método axiomático** (Euclides) se dedujeron las leyes del movimiento de los planetas.
(Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687)
- El estudio del movimiento de los planetas planteó problemas tan fructíferos que supuso el origen de la **Teoría del Caos**, o Teoría de los Sistemas Dinámicos, a finales del siglo XIX.
(Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Celeste*, 1892)
- Los métodos de la Teoría de Sistemas Dinámicos son útiles hoy en día para desarrollar complejas misiones espaciales, como la **misión Génesis**.

- Es importante el estudio geométrico del espacio de fase, para descubrir el esqueleto del mismo (posiciones de equilibrio, variedades invariantes, etc.)



- El estudio de los sistemas dinámicos desde un punto de vista geométrico fue iniciado por el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912).

Modelos matemáticos

El método científico

Un modelo matemático es una aproximación de la realidad, que ha de ser contrastado experimentalmente, y que permite hacer predicciones.

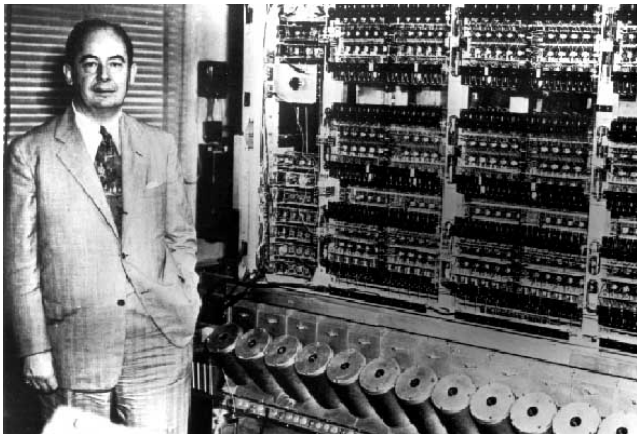
En palabras del matemático húngaro John von Neumann (1903-1957):

Las ciencias no tratan de explicar y casi no intentan interpretar: se consagran sobre todo a hacer modelos. Por modelo se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas aclaraciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de esa construcción matemática es única y precisamente que sea eficaz.



Modelos matemáticos

El método científico



Modelos matemáticos

Un ejemplo: el movimiento de los planetas (I)

- Johannes Kepler (1571-1630), matemático y astrónomo alemán, descubrió que la Tierra y el resto de planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol, **postulando** las tres leyes fundamentales del movimiento planetario.

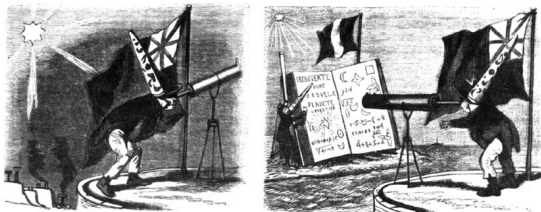


- Isaac Newton (1643 - 1727), matemático, físico y astrónomo inglés, **demostró** las tres leyes de Kepler a partir de las leyes de la dinámica y la **Ley de la Gravitación Universal**.

Modelos matemáticos

Un ejemplo: el movimiento de los planetas (II)

- U.J. Le Verrier (1811-1877) y J.C. Adams (1819-1892), independientemente, **predijeron** la existencia de un octavo planeta que alteraba la órbita de Urano, descubierto en 1791.
- El planeta Neptuno fue descubierto por el astrónomo J.G. Galle en 1845, en la posición calculada.

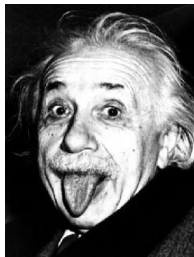


Unas viñetas publicadas en Francia acerca de la controversia sobre el descubrimiento de Neptuno. Adams busca en vano el planeta y lo encuentra en las páginas del libro de Le Verrier.

Modelos matemáticos

Un ejemplo: el movimiento de los planetas (III)

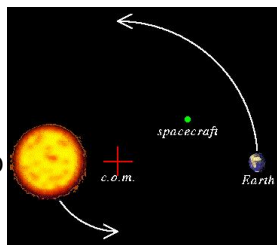
- Le Verrier descubrió en 1855 una **discrepancia** en la órbita de Mercurio, que no era predicha por la teoría Newtoniana de la gravitación.
- Albert Einstein (1879-1955), físico-matemático alemán, corrigió la teoría de la gravitación en 1915, con su **Teoría General de la Relatividad**, explicando la órbita de Mercurio.



El modelo matemático del sistema Tierra-Sol-nave

Hipótesis simplificadoras: El problema restringido de tres cuerpos (RTBP)

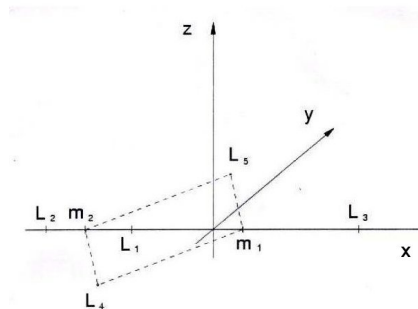
- La masa de la nave es tan pequeña comparada con las de la Tierra y el Sol, que éstos no se ven afectados.
- El Sol y la Tierra rotan alrededor del centro de masas común en **órbitas circulares**.
- El estudio del movimiento de una partícula de masa m negligible bajo la acción de dos masas $m_1 = m_S$ y $m_2 = m_E$ (primarias) que se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masas común se conoce como el **Problema restringido de tres cuerpos (RTBP)**.



El modelo matemático del sistema Tierra-Sol-nave

El sistema de referencia sinódico

- Se toma un **sistema de referencia sinódico**, con origen en el centro de gravedad de las masas primarias y que gira con éstas.



- Las unidades de medida son:
 - unidad de distancia = 1 au
 - unidad de tiempo = 1 año
 - unidad de masa = masa total

Así:

- $G = 1$ (constante de gravitación),
- $\mu = \frac{m_E}{m_S + m_E} \simeq 0.304036 \times 10^{-5}$,
- $d(E, 0) = 1 - \mu$, $d(S, 0) = \mu$.

Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}$$

donde

$$V(x, y, z) = -\frac{(1 - \mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

y

$$r_1 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - (\mu - 1))^2 + y^2 + z^2}.$$

Definimos los **momentos** asociados a x, y, z como

$$p_x = \dot{x} - y$$

$$p_y = \dot{y} + x$$

$$p_z = \dot{z}$$

La **energía** (o **Hamiltoniano**)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + y p_x - x p_y + V(x, y, z) \end{aligned}$$

es una **integral primera** de las ecuaciones, i.e. una **cantidad conservada** del movimiento.

El modelo matemático del sistema Tierra-Sol-nave

Ecuaciones Hamiltonianas

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y ,$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x ,$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z ,$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-\mu+1) ,$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y ,$$

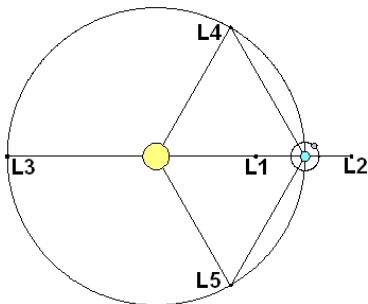
$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1-\mu}{r_1^3}z - \frac{\mu}{r_2^3}z$$

El modelo matemático del sistema Tierra-Sol-nave

Puntos de equilibrio

- Los puntos de equilibrio de un sistema son aquéllos en los que se anulan todas las fuerzas.
- Joseph-Louis Lagrange (1763-1813) demostró que el RTBP tiene 5 puntos de equilibrio (los **puntos de Lagrange**):

L_1, L_2, L_3 son **colineales** y L_4, L_5 son **triangulares**.



El punto L_1

Adecuación y problemas

- El punto L_1 parece apropiado para nuestra misión, pues está situado relativamente cerca de la Tierra, y permite observación permanente del Sol.
- Problema: Si dejamos la nave en el punto L_1 , no podremos mantener contacto con ella.

Pero, ¿qué pasa si dejamos la nave cerca de L_1 ?

¡Hay que estudiar más!

El punto L_1

Dinámica cerca de L_1

El espacio de fase es 6D (posiciones \times momentos).

El movimiento de las seis variables que describen el movimiento de la nave cerca de L_1 se descompone esencialmente en:

- dos pares de direcciones que se comportan como un muelle, y oscilan alrededor de L_1 ;
- otro par de direcciones que se comportan como un péndulo invertido, y son inestables.

Se dice que el punto L_1 es del tipo **centro** \times **centro** \times **silla**.

Nota: Esta propiedad también se verifica en los tres puntos colineales de los sistemas Sol-Tierra, Sol-Jupiter y Tierra-Luna.

El punto L_1

Dinámica sobre la variedad central

Un primer paso para estudiar la dinámica cerca de L_1 consiste en estudiar la dinámica sobre su **variedad central**.

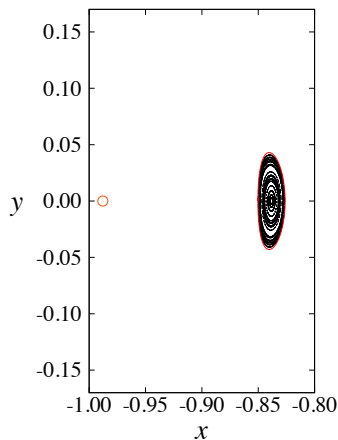
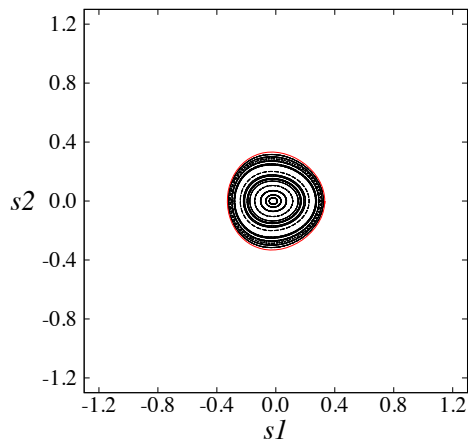
- La variedad central es 4D.
- Sobre cada nivel de energía, la variedad central es 3D.
- Una **aplicación de Poincaré** conveniente reduce el estudio a una **aplicación 2D que preserva área**.

Los objetos invariantes de la aplicación de Poincaré corresponden a objetos invariantes del campo vectorial.

Nota: Los resultados siguientes corresponden al sistema Tierra-Luna.

El punto L_1

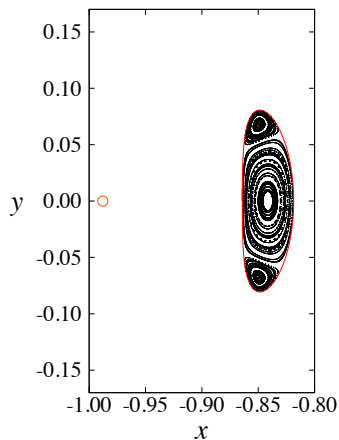
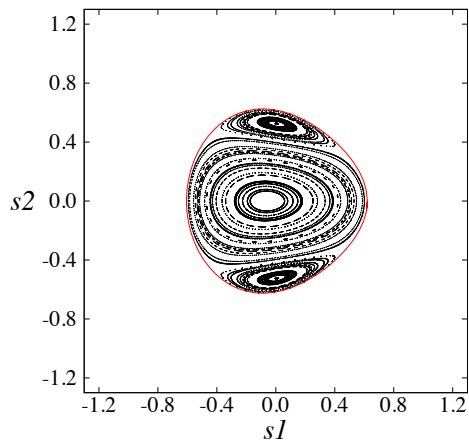
Dinámica sobre la variedad central



$$H = -1.590$$

El punto L_1

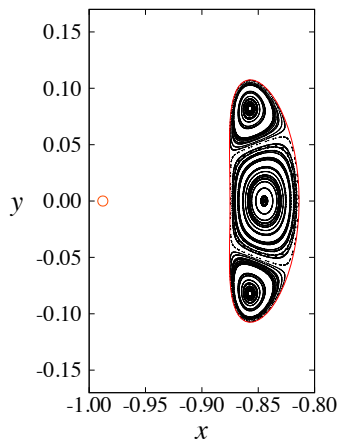
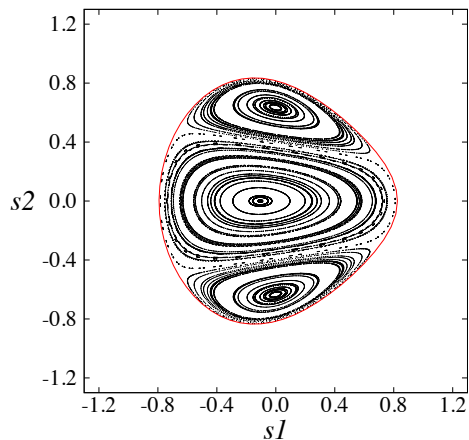
Dinámica sobre la variedad central



$$H = -1.580$$

El punto L_1

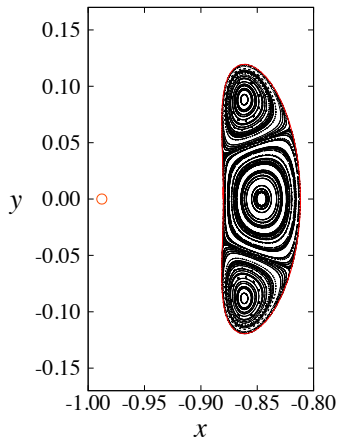
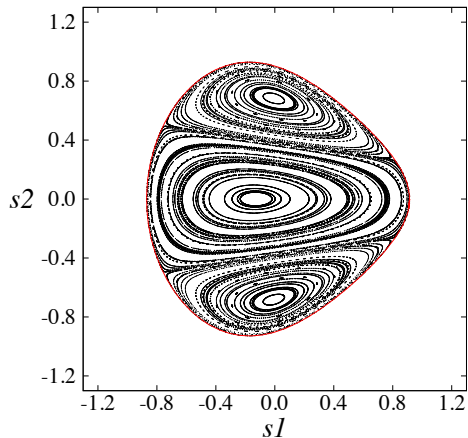
Dinámica sobre la variedad central



$$H = -1.570$$

El punto L_1

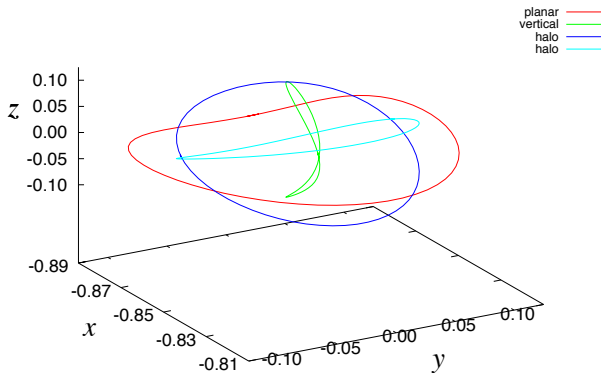
Dinámica sobre la variedad central



$$H = -1.565$$

El punto L_1

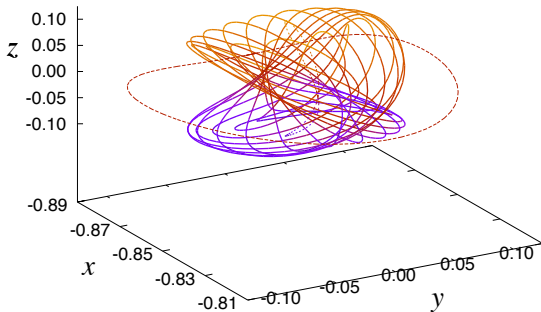
Órbitas periódicas ($H = -1.565$)



Principales órbitas periódicas

El punto L_1

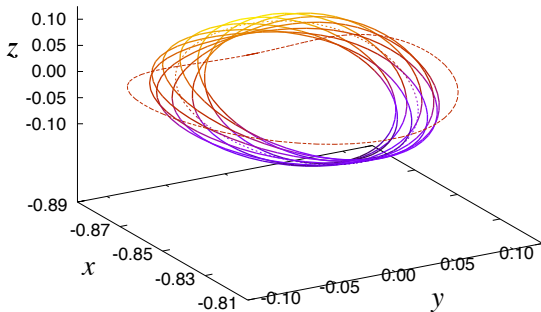
Órbitas periódicas ($H = -1.565$)



O.p. alrededor de la órbita vertical, con número de rotación -1:18

El punto L_1

Órbitas periódicas ($H = -1.565$)



O.p. alrededor de una órbita halo, con número de rotación 1:9

El punto L_1 y sus órbitas halo

Órbitas Halo

- Las órbitas Halo son órbitas periódicas centradas en L_1 .
- Son perpendiculares al plano de la eclíptica.
- Como L_1 , son inestables.
- Hay una familia de órbitas que navegan hacia la órbita halo, y forman una especie de tubo: la **variedad estable**.
- Hay una familia de órbitas que despegan desde la órbita halo, y forman una especie de tubo: la **variedad inestable**¹.

¹halo_tube_color.mov

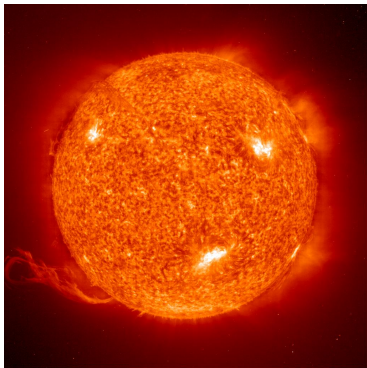
El punto L_1 y sus órbitas halo

Ventajas de las órbitas halo en L_1

- Permiten una observación permanente del Sol.
- Si el radio de la órbita es suficientemente grande, la transmisión de datos hacia la Tierra no tiene interferencias solares.
- El movimiento relativo *Sol* – *nave* es suave, siendo apropiado para helioseismología (estudio de tormentas solares, etc.). (misión SOHO)
- Está fuera de la magnetosfera terrestre, de modo que es apropiado para recoger partículas expulsadas por el Sol. (misión Génesis)

El punto L_1 y sus órbitas halo

La misión SOHO (ESA & NASA)

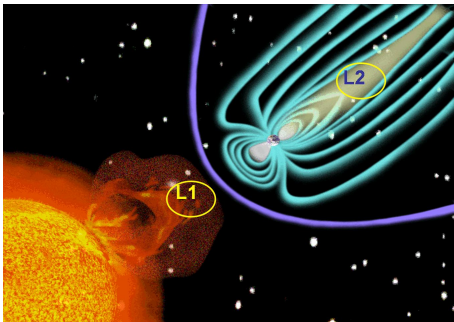


La SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) fue lanzada con un cohete Atlas Centauro en diciembre de 1995 y empezó a operar en marzo de 1996.

El 14 de septiembre de 1997, fotografió una erupción en la corona solar. La temperatura de los chorros es de entre 60,000 – 80,000 K, y la de la corona solar está sobre 1,000,000 K.

El punto L_1 y sus órbitas halo

Más allá de la magnetosfera terrestre



El viento solar toma la forma de la magnetosfera terrestre, y se forman tormentas magnéticas al acercarse a la Tierra.

Las líneas blancas representan el viento solar y las azules la magnetosfera. La línea lila es el frente de choque.

El punto L_1 y sus órbitas halo

Ventajas de las variedades invariantes

- Las variedades invariantes (los tubos de llegada y salida de las órbitas halo) hacen de **autopistas espaciales**.
- Estos objetos geométricos se pueden **calcular** de forma muy precisa. Las técnicas fueron introducidas hacia el año 1985 por el **Grup de Sistemes Dinàmics** de Barcelona, liderado por Carles Simó.
- El gasto energético es mínimo, porque es la Naturaleza quien hace el trabajo.

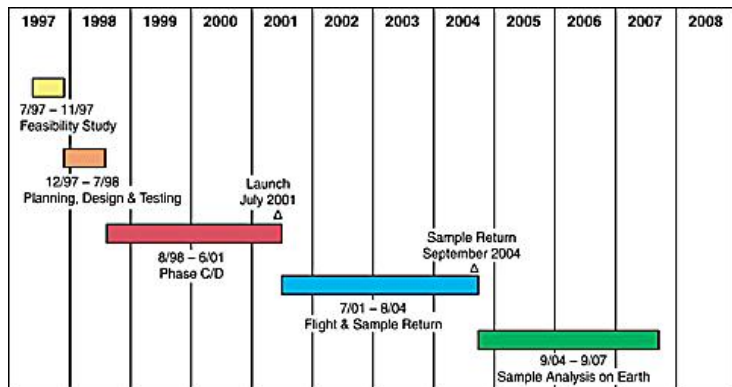
La misión Génesis

Descripción

- La nave se envía hacia una órbita halo del punto L_1 , mediante la variedad estable.
- La órbita de aparcamiento está a unos 1.5 millones de km en la dirección del Sol, y es perpendicular al plano de la eclíptica.
- En esta órbita, la nave despliega unos colectores, y se toma un baño de sol por más de dos años.
- Después vuelve hacia la Tierra, tomando la variedad inestable, y después de una carambola con L_2 , llega a la Tierra.
- La nave deja una pequeña cápsula con las muestras recogidas en su interior, y es recogida por un helicóptero.
- Los científicos tienen trabajo...

La misión Génesis

Programa



- Días de vuelo: 1127
- Días de muestreo: 884
- Distancia recorrida: \approx 32 millones de km

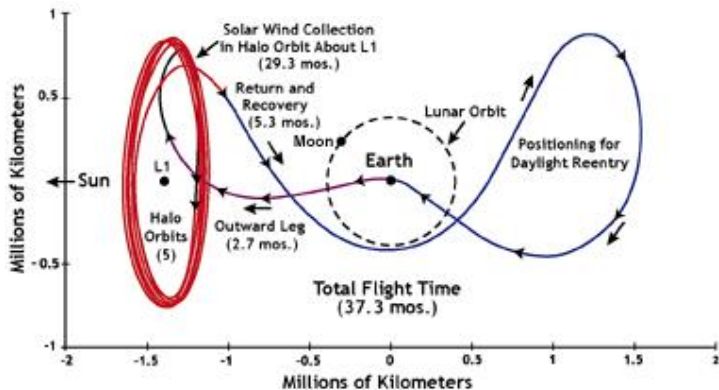
La misión Génesis

El despegue ...

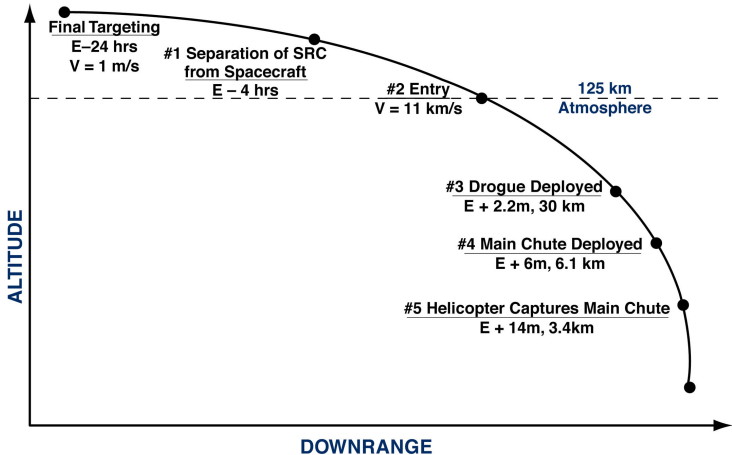


La misión Génesis

El paseo ...



SRC Recovery Profile



La misión Génesis

El regreso: lo que pudo haber sido ...



Pruebas de recogida de la cápsula

La misión Génesis

¡y no fue!



El “castañazo”²

²genesis.mov

Àlex Haro (MAiA-UB)

Genesis Mission

La misión Génesis

... y después, ¿qué?

Afortunadamente, se pudo recuperar el cargamento, de

$\simeq 10^{20}$ iones $\simeq 0.4$ miligramos.

Está siendo analizado por los científicos ...

GENESIS SCIENCE TEAM 2006



Otras aplicaciones del RTBP

A la Astronomía y la Astrodinámica

- Alrededor de los puntos L_4 y L_5 del sistema Sol-Júpiter, que son estables, se han encontrado nubes de asteroides (que son llamados Troyanos y Griegos).
- Estaciones espaciales permanentes en los puntos L_4 y L_5 del sistema Tierra-Luna.
- Sonda en una órbita halo cerca del punto L_2 del sistema Tierra-Luna, para estudiar la cara oculta de la Luna.
- El Sistema Solar se puede considerar como una composición de RTBPs, de modo que se pueden diseñar autopistas interplanetarias pegando unas variedades con otras.

Otras aplicaciones del RTBP

Otras misiones en el RTBP Tierra-Sol

ISEE-3	(NASA)	L1	1978	Solar wind, cosmic rays
WIND	(NASA)	L1	1994	Solar wind, magneto-sphere
SOHO	(ESA-NASA)	L1	1996	Solar observatory
ACE	(NASA)	L1	1997	Solar wind, particles
MAP	(NASA)	L2	2001	Background cosmic radiation
GENESIS	(NASA)	L1-2	2001	Solar wind composition
WSO	(ESA)	L2	2006	Ultraviolet astronomy
FIRST/HERSCHEL	(ESA)	L2	2007	Infrared astronomy
PLANK	(ESA)	L2	2007	Cosmic microwave background
TRIANA	(NASA)	L1	2008	Earth observation
GAIA	(ESA)	L2	2012	Astrometry
NGST/JWST	(NASA)	L2	2011	Space telescope
Constellation X	(NASA)	L2	2013	X-ray astronomy
DARWIN	(ESA)	L2	2014	Planetary systems
TPF	(NASA)	L2	2015	Planetary systems
SAFIR	(NASA)	L2	2015	Infrared telescope

- El concepto de autopista interplanetaria ³ fue introducido por el ingeniero de la NASA Martin Lo.
- En las páginas de la NASA se puede leer

Inspired by this pioneering work and research conducted by scientists at the University of Barcelona, Lo conceived the theory of the Interplanetary Superhighway.

- Martin Lo aprendió las técnicas basadas en cálculo de variedades invariantes haciendo de “referee” de un artículo escrito por G. Gómez, À. Jorba, J. Masdemont y C. Simó (UB-UPC) para la revista *Celestial Mechanics*, en 1993.

³LunarGatewayServicing.avi

